


Simulación de los estados vórtices en una muestra superconductora cuadrada de Tipo II

Simulation of vortex states in a square Type II superconducting sample



¹Lucio Cáceres Espinoza  ORCID , ¹Jaime Francisco Vento Flores ORCID, ²Abraham Pablo Aslla Quispe ORCID, ³Johonel Caceres Espinoza ORCID

¹Universidad Nacional Tecnológica de Lima Sur, Lima, Perú

²Universidad Nacional Intercultural de Quillabamba, Cusco, Perú

³Universidad Nacional de San Antonio Abad del Cusco, Cusco, Perú

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de los estados vórtices, la densidad de electrones superconductores y la inducción magnética en una muestra superconductora con geometría cuadrada de tipo II, utilizando las ecuaciones bidimensionales de Ginzburg Landau no lineal dependiente del tiempo (TDGL, Time dependen Gisburn and Landau equation) que se resuelven usando el método de los elementos finitos, implementado en el Software COMSOL Multiphysics. Para este fin normalizamos las ecuaciones de Ginzburg Landau con condiciones de contorno de Neumann y condiciones iniciales en el estado Meissner, para diferentes intensidades de campo magnético aplicado y en dirección perpendicular a la muestra superconductora. Los resultados muestran que, al aplicar diferentes intensidades de campo magnético sobre la muestra, la barrera de energía en la frontera disminuye permitiendo el ingreso del flujo magnético cuantizado, posibilitando observar: los estados vórtice, la supresión de la densidad de electrones superconductores y el incremento de la inducción magnética en la muestra superconductora. La penetración del flujo magnético cuantizado depende del tamaño de la muestra, el tiempo y la intensidad del campo magnético aplicado.

Palabras Claves: Ecuación de Ginzburg Landau dependiente del tiempo, estados vórtices, densidad de electrones superconductores, inducción magnética, estado Meissner y superconductor de tipo II.

Abstract

In this work, the dynamics of the vortex states, the density of superconducting electrons and magnetic induction in a superconducting sample with square type II geometry are studied, using the two-dimensional nonlinear time-dependent Ginzburg Landau (TDGL) equations. and Landau equation) that are solved using the finite element method, implemented in the COMSOL Multiphysics Software. For this purpose, we normalize the Ginzburg Landau equations with Neumann boundary conditions and initial conditions in the Meissner state, for different intensities of the applied magnetic field and in a direction perpendicular to the superconducting sample. The results show that, by applying different magnetic field intensities on the sample, the energy barrier at the boundary decreases, allowing the entry of the quantized magnetic flux, making it possible to observe: the vortex states, the suppression of the density of superconducting electrons and the increase of magnetic induction in the superconducting sample. The penetration of the quantized magnetic flux depends on the sample size, time and the intensity of the applied magnetic field.

Keywords: Time-dependent Ginzburg Landau equation, vortex state, superconducting electron density, magnetic induction, Meissner state and type II superconductor.

INTRODUCCIÓN

En el año 1950 Vitaly Ginzburg y Lev Landau propusieron el modelo fenomenológico de la superconductividad estacionaria, basada en aspectos termodinámicos de la transición de fase de segundo orden cercana a la temperatura crítica T_c (Hoffmann, 2012), expresada en términos del parámetro de orden complejo Ψ . Esta idea fue usada inicialmente por Lev Landau en el estudio de la transición de fase de un imán en estado normal y estado magnético, expresando la energía libre en función de un parámetro de orden, denominado magnetización (Tinkham, M., 2004). Posteriormente la teoría de Ginzburg y Landau permitió la distinción de los superconductores de tipo I y II, este último se caracteriza por la penetración del campo magnético en forma de un flujo magnético cuantizado, denominado vórtices. Abrikosov descubrió la formación de redes de vórtices superconductores llamados redes de Abrikosov (Abrikosov, A. A., 2017). La teoría inicial propuesta por Ginzburg y Landau es expresada en su forma estacionaria y que fue generalizada en su forma dependiente del tiempo (Schmid, 1966) permitiendo hacer un estudio de la dinámica de vórtices y las interacciones vórtice - vórtice (Chaves, 2011). Para geometrías complejas la solución de las ecuaciones de Ginzburg Landau dependiente del tiempo se realizan utilizando el método de los elementos finitos, implementado como un módulo dentro del software COMSOL Multiphysics (Sorensen, Larson, & Madsen, 2006), que permite resolver numéricamente el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar el parámetro de orden y el potencial vector magnético, que permiten el cálculo de la densidad electrones superconductores y la inducción magnética.

MATERIALES Y MÉTODOS

2.1. ECUACIONES DE GINZBURG LANDAU DEPENDIENTE DEL TIEMPO

La evolución del parámetro de orden complejo Ψ y el potencial vectorial magnético A , se describen con la ecuación diferencial acoplada de Ginzburg Landau dependiente del tiempo (Gor'kov, 1950; Schmid, 1966) expresadas en el sistema internacional por

$$\frac{\hbar^2}{2mD} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i \frac{q}{\hbar} \phi \right) \psi = - \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - qA \right)^2 \psi + \alpha \psi - \beta |\psi|^2 \psi; \quad \Omega \times [0, t] \quad (1)$$

$$\sigma \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \frac{q\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^2}{m} |\psi|^2 A - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times A; \quad \Omega \times [0, t] \quad (2)$$

En la ecuación (1) los parámetros: m y q son la doble masa y carga del electron ($m = 2m_e$; $q = 2e$); $\hbar = h/2\pi$ con h la constante de Planck, α y β parámetros fenomenológicos, D el parámetro de difusión, $\sqrt{-1} = i$ el número complejo y ψ el parámetro de orden complejo. De la misma forma en la ecuación (2): σ es la conductividad eléctrica del conductor normal, ϕ el potencial eléctrico, μ_0 la permeabilidad magnética del vacío y A el potencial vectorial magnético.

Las condiciones de frontera son definidas por:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{i}\nabla\psi - qA\psi\right) \cdot n &= 0 & \partial\Omega \\ (\nabla \times A - B_{ex}) \times n &= 0 & \partial\Omega \\ \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\phi\right) \cdot n &= 0 & \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Donde:

$\partial\Omega$ es la frontera del superconductor

n es un vector unitario normal a la frontera

B_{ex} es el campo magnetico externo aplicado.

Las condiciones iniciales están definidas por:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y, z, 0) &= \psi_0(x, y, z) & \text{en } \Omega \\ A(x, y, z, 0) &= A_0(x, y, z) & \text{en } \Omega \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.2. NORMALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE GINZBURG LANDAU DEPENDIENTE DEL TIEMPO

Para resolver las ecuaciones (1) y (2), junto a las condiciones de frontera (3) y las condiciones iniciales (4) expresamos dichas ecuaciones en su forma adimensional (Sorensen, Larson, & Madsen, 2006), para ello normalizamos las siguientes magnitudes físicas: la parte espacial $x - y - z$, el parámetro de orden complejo ψ , el potencial vectorial magnético A , la conductividad eléctrica del metal σ , el potencial eléctrico ϕ , el tiempo t , el operador gradiente ∇ y el operador derivada temporal $\frac{\partial}{\partial t}$. Normalizando las ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x', y \rightarrow \lambda y', z \rightarrow \lambda z' \\ \psi &\rightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \psi' \\ A &\rightarrow \frac{\phi_0}{2\pi\xi} A' \\ \sigma &\rightarrow \frac{1}{\mu_0 D \kappa^2} \sigma' \\ \phi &\rightarrow \alpha D \kappa^2 \sqrt{\frac{2\mu_0}{\beta}} \phi' \\ t &\rightarrow \frac{\xi^2}{D} \tau' \\ \nabla' &= \lambda \nabla \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{D}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \tau'} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Reemplazamos las magnitudes normalizadas (5) en las ecuaciones (1), (2) y (3), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + i\kappa\phi\right)\psi = -\left(\frac{i\nabla}{\kappa} + A\right)^2\psi + \psi - |\psi|^2; \quad \psi \Omega \times [0, \tau] \quad (6)$$

$$\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial \tau} + \nabla\phi\right) = \frac{1}{2i\kappa}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - A|\psi|^2 - \nabla \times \nabla \times A \quad A \Omega \times [0, \tau] \quad (7)$$

Y las condiciones de frontera normalizadas, vienen dadas como:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{i}{\kappa}\nabla\psi + A\psi\right) \cdot n &= 0 \\ (\nabla \times A - B_{ex}) \times n &= 0 \\ \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\phi\right) \cdot n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Escogemos un gauge de transformacion (Fleckinger-Pelle, 1995) con potencial eléctrico cero, para simplificar las ecuaciones (6), (7) y (8), dando como resultado:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\psi = -\left(\frac{i\nabla}{\kappa} + A\right)^2\psi + \psi - |\psi|^2\psi; \quad \Omega \times [0, \tau] \quad (9)$$

$$\sigma\frac{\partial A}{\partial \tau} = \frac{1}{2i\kappa}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - A|\psi|^2 - \nabla \times \nabla \times A; \quad \Omega \times [0, \tau] \quad (10)$$

Y con condiciones de frontera simplificadas:

$$\left. \begin{aligned} A \cdot n &= 0 \\ \frac{i}{\kappa}\nabla\psi \cdot n &= 0 \\ (\nabla \times A - B_{ex}) \times n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Las ecuaciones (9), (10) y (11) se denominan ecuaciones de Ginzburg Landau dependiente del tiempo con potencial electrico nulo y condiciones de frontera simplificadas (Li, 2015).

2.3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Para resolver las ecuaciones (9) y (10) en una muestra superconductor cuadrada de tipo II utilizamos el Software COMSOL Multiphysics que contiene un solucionador de elementos finitos, donde primero discretizamos la muestra en mallas triangulares, luego aplicamos las librerías del software para una ecuación diferencial parcial de la forma:

$$e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F \quad (12)$$

donde e_a es el coeficiente de masa, d_a el coeficiente de amortiguamiento, ambas son matrices de orden $N \times N$, Γ el flujo, que es un vector columna de dimensión N , $\nabla \cdot \Gamma$ la divergencia del flujo total y F es el termino fuente y las condiciones de frontera de Neumann y Dirichlet están dadas por:

$$-n \cdot \Omega = G; \quad R = 0 \quad (13)$$

La solución es un vector columna u de dimensión N

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \dots u_N]^t \quad (14)$$

2.4. ECUACIÓN DE GINZBURG LANDAU DEPENDIENTE DEL TIEMPO BIDIMENSIONAL

Las ecuaciones de Ginzburg Landau dependiente del tiempo (9) y (10) expresados en su forma bidimensional son:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\kappa^2} \nabla u_1 \right) = \frac{2}{\kappa} \nabla u_2 \cdot A + \frac{u_2}{\kappa} \nabla \cdot A - (u_3^2 + u_4^2)u_1 + u_1 - (u_1^2 + u_2^2)u_1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(-\frac{1}{\kappa^2} \nabla u_2 \right) = -\frac{2}{\kappa} \nabla u_1 \cdot A - \frac{u_1}{\kappa} \nabla \cdot A - (u_3^2 + u_4^2)u_2 + u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_2 \quad (16)$$

$$\sigma \frac{\partial u_3}{\partial t} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ u_{4x} - u_{3y} - B_{az} \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa} (u_1 u_{2x} - u_2 u_{1x}) - (u_1^2 + u_2^2)u_3 \quad (17)$$

$$\sigma \frac{\partial u_4}{\partial t} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} u_{3y} - u_{4x} + B_{az} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\kappa} (u_1 u_{2y} - u_2 u_{1y}) - (u_1^2 + u_2^2)u_4 \quad (18)$$

$$0 \frac{\partial u_5}{\partial t} + \nabla A = u_{3x} + u_{4y} + u_5 \quad (19)$$

Siendo las condiciones iniciales dadas por:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y, 0) &= u_1(x, y, 0) + i u_2(x, y, 0) \\ A(x, y, 0) &= (u_3(x, y, 0), u_4(x, y, 0)) \\ u_5(x, y, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Las ecuaciones (15), (16), (17), (18) y (19) expresan la forma general de la ecuación diferencial (12), con coeficientes de masa e_a y amortiguamiento d_a dados por:

$$e_a = (0)_{5 \times 5}; \quad d_a = \text{diag}(1, 1, \sigma, \sigma, 0) \quad (21)$$

La divergencia del flujo total $\nabla \cdot \Gamma$ y el termino fuente F son:

$$\nabla \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 u_1 \\ -\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 u_2 \\ u_{4xy} - u_{3yy} \\ u_{3yx} - u_{4xx} \\ u_{3x} + u_{4y} \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} \frac{2}{\kappa} \nabla u_2 \cdot A + \frac{u_2}{\kappa} \nabla \cdot A - (u_3^2 + u_4^2)u_1 + u_1 - (u_1^2 + u_2^2)u_1 \\ -\frac{2}{\kappa} \nabla u_1 \cdot A - \frac{u_1}{\kappa} \nabla \cdot A - (u_3^2 + u_4^2)u_2 + u_2 - (u_1^2 + u_2^2)u_2 \\ \frac{1}{\kappa} (u_1 u_{2x} - u_2 u_{1x}) - (u_1^2 + u_2^2)u_3 \\ \frac{1}{\kappa} (u_1 u_{2y} - u_2 u_{1y}) - (u_1^2 + u_2^2)u_4 \\ u_{3x} + u_{4y} + u_5 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Donde $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5]^t$ es la solución bidimensional de la ecuación (12), con condiciones de frontera de Neumann expresado por:

$$-n \cdot \Omega = 0 \quad (23)$$

Además, se utiliza como condición inicial para el tiempo el estado Meissner $u_1^2 + u_2^2 = 1$, esto indica que el parámetro de orden complejo es definido por $u_1 = 1$ y el potencial vectorial magnético inicial es $(u_3, u_4) = (0,0)$ con constante kappa $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ que caracteriza al superconductor de tipo II y un campo magnético externo aplicado en la dirección z positivo B_{ex} perpendicular a la muestra superconductora.

2.5. MUESTRA SUPERCONDUCTORA

Se considera una muestra con geometría cuadrada descrita por magnitudes normalizadas de acuerdo a la ecuación (5) con valores dados en la **Tabla 1**. El enmallado realizado sobre la muestra superconductora cuadrada se muestra en la **Fig. 1**.

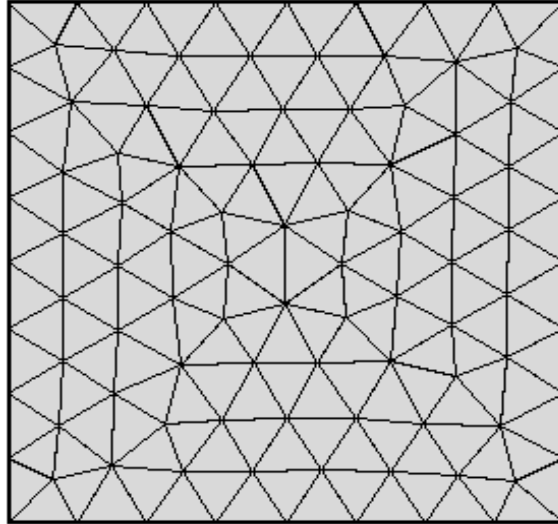


Figura 1. Modelo de enmallado de una muestra cuadrada.

Tabla 1. Magnitudes normalizadas para un superconductor con geometría cuadrada.

| | | |
|-------------------------|--------------|---------|
| Lado del cuadrado | L | 4 y 6 |
| Kappa | κ | 4 |
| Conductividad eléctrica | σ | 1 |
| Campo magnético externo | B_{ex} | 0.8 y 2 |
| Tiempo de ejecución | τ | 500 |
| Tamaño de paso temporal | $\Delta\tau$ | 1 |

RESULTADOS

Determinamos la evolución de la densidad de electrones superconductores es $n(x, y, \tau) = u_1^2 + u_2^2$ y la inducción magnética $B_{az}(x, y, \tau) = u_{4x} - u_{3y}$ en muestra superconductora cuadrada de tipo II para los tiempos normalizados $[0, \tau]$, usando las condiciones normalizadas descritas en la Tabla 1 para muestras cuadradas de lados normalizados $L = 4$ y 6, constante de Ginzburg Landau $\kappa = 4$, conductividad eléctrica $\sigma = 1$, campos magnéticos externos aplicados en la dirección perpendicular al eje z positivo $B_{ex} = 0.8$ y 2, para tiempos de ejecución de $\tau = 500$ y tamaño de paso temporal normalizado $\Delta\tau = 1$. El enmallado usado en la muestra superconductora tiene tamaño extra fino.

3.1.MUESTRAS DE LADOS 4 Y 6 CON CAMPO MAGNÉTICO APLICADO $B_{ext} = 0.8$

En las **Fig. 2 y 3** mostramos los resultados de la evolución de la densidad de electrones superconductores cuando aplicamos un campo magnético de $B_{\text{ext}} = 0.8$ en la dirección z perpendicular para muestras cuadradas de lados adimensionales 4 y 6, para diferentes tiempos τ .

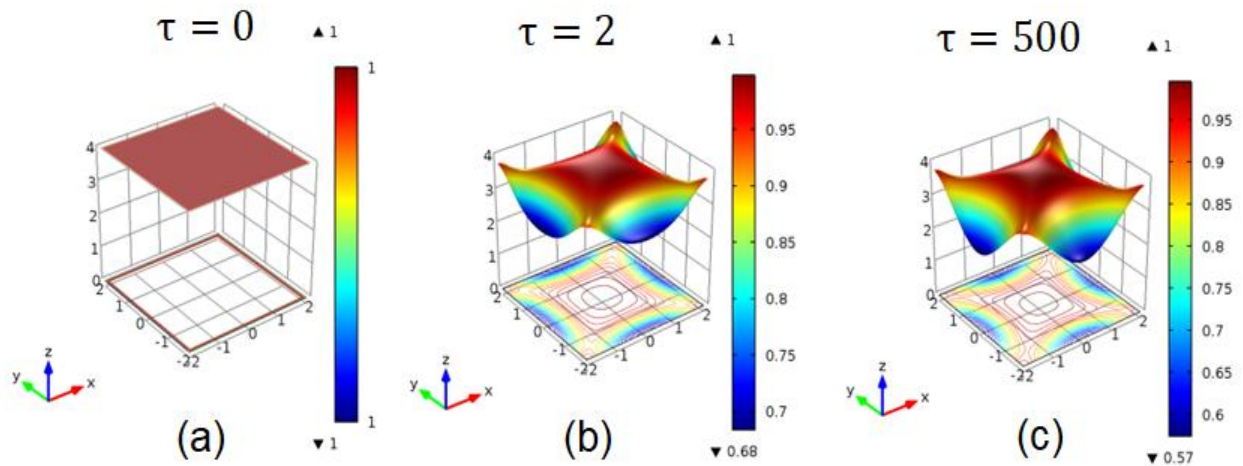


Figura 2. Evolución de la densidad de electrones superconductores $n(x, y, \tau) = u_1^2 + u_2^2$ en una muestra cuadrada de lado 4 con campo magnético aplicado de $B_{\text{ext}} = 0.8$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

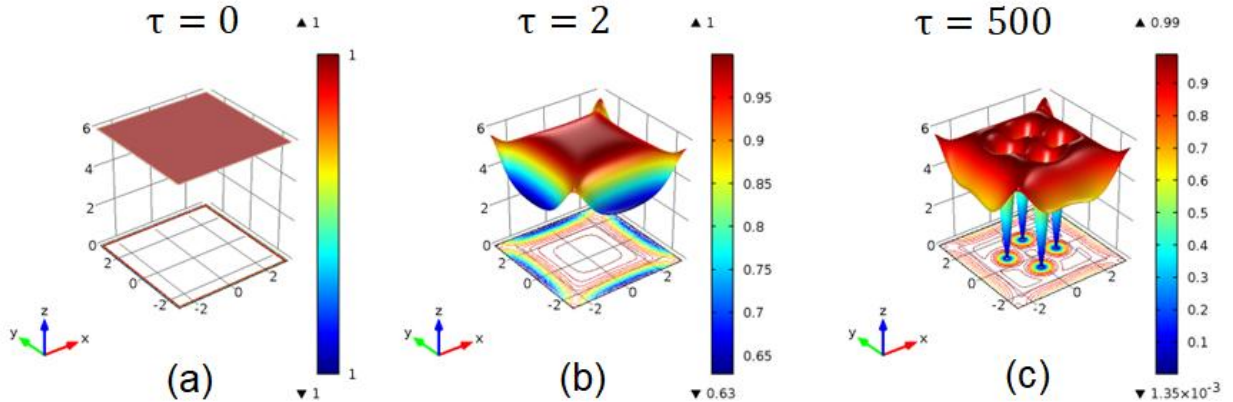


Figura 3. Evolución de la densidad de electrones superconductores $n(x, y, \tau) = u_1^2 + u_2^2$ en una muestra cuadrada de lado 6 con campo magnético aplicado de $B_{\text{ext}} = 0.8$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

Los resultados para la inducción magnética $B_{\text{az}}(x, y, \tau)$ para las muestras cuadradas de lados normalizados 4 y 6 en tres escenarios temporales $\tau = 0, 2$ y 500 se muestran en las **Fig. 4 y 5**.

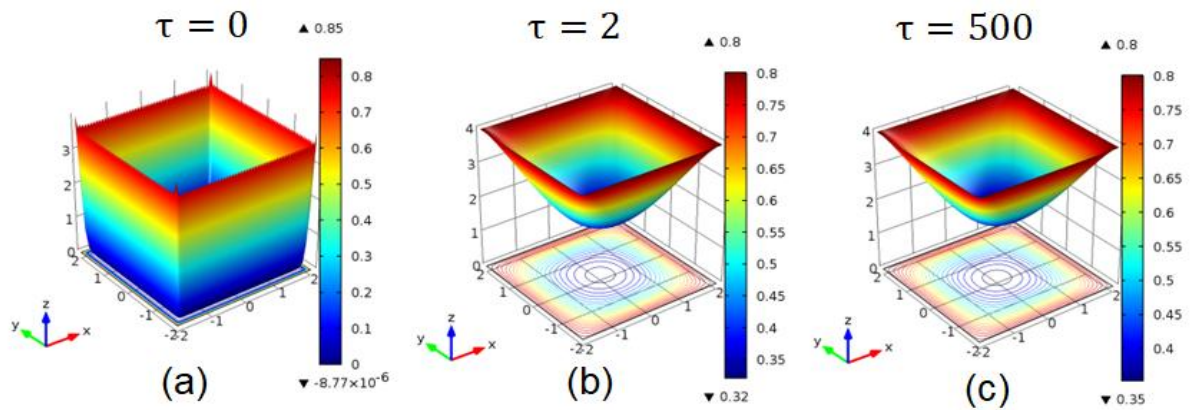


Figura 4. Evolución de la inducción magnética $B_{az}(x, y, \tau) = u_{4x} - u_{3y}$ de una muestra cuadrada de lado 4 con un campo magnético aplicado de $B_{extz} = 0.8$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

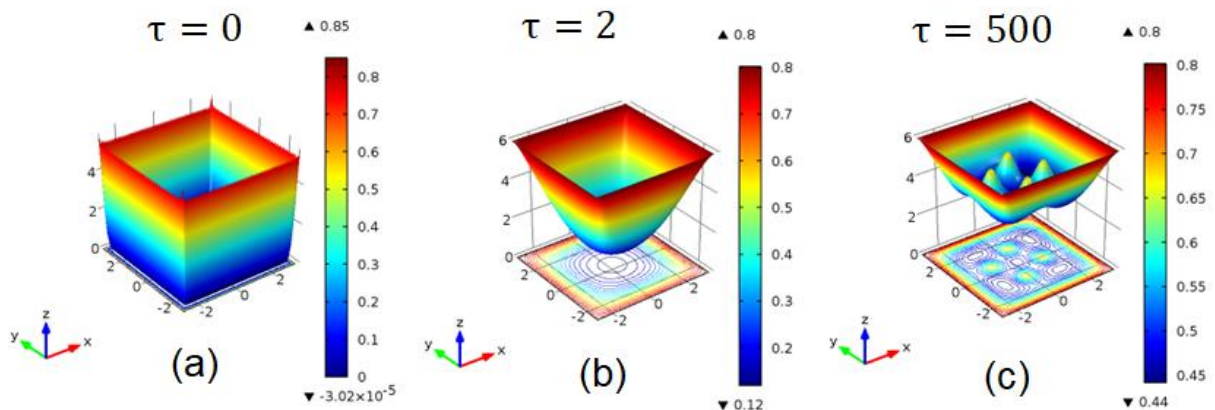


Figura 5. Evolución de la inducción magnética $B_{az}(x, y, \tau) = u_{4x} - u_{3y}$ de una muestra cuadrada de lado 6 con un campo magnético aplicado de $B_{extz} = 0.8$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

3.2. MUESTRAS DE LADOS 4 Y 6 CON CAMPO MAGNÉTICO APLICADO $B_{ext} = 2.0$

Cuando aplicamos un campo magnético más intenso descrito por el valor normalizado $B_{ext} = 2$ sobre la muestra cuadrada de lados 4 y 6, la densidad de electrones superconductores, para tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 son mostrados en las **Fig. 6 y 7**.

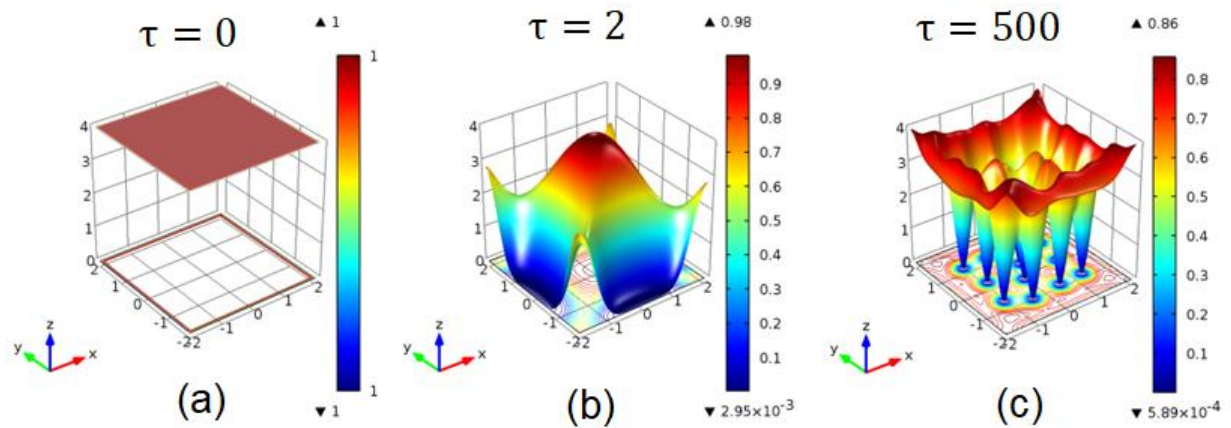


Figura 6. Evolución de la densidad de electrones superconductores $n(x, y, \tau) = u_1^2 + u_2^2$ en una muestra cuadrada de lado 4 con un campo magnético aplicado de $B_{\text{ext}} = 2$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

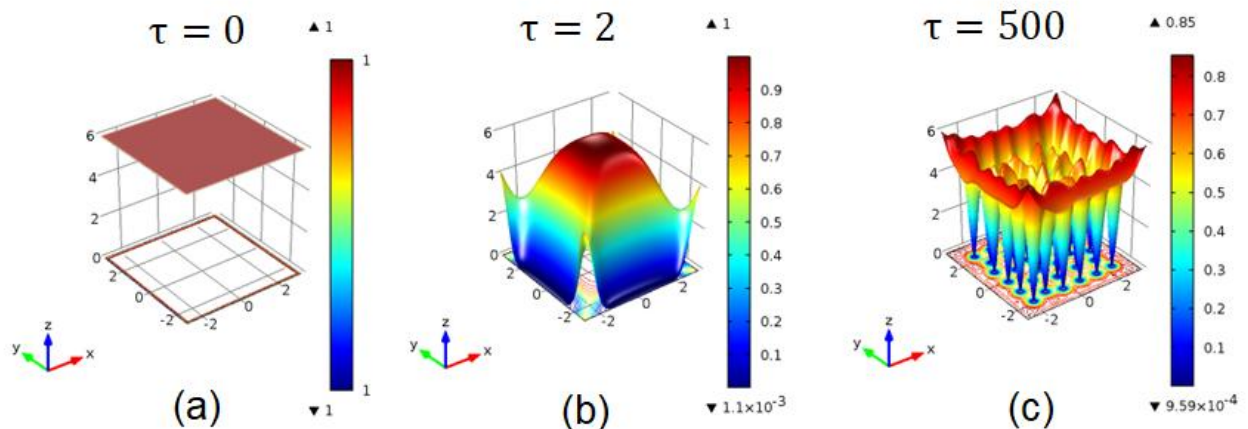


Figura 7. Evolución de la densidad de electrones superconductores $n(x, y, \tau) = u_1^2 + u_2^2$ en una muestra cuadrada de lado 6 con un campo magnético aplicado de $B_{\text{ext}} = 2$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

La evolución de la inducción magnética en la muestra cuadrada de lados 4 y 6 cuando se aplica un campo magnético externo en la dirección perpendicular del eje z positivo $B_{\text{ext}} = 2$, para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500, se muestran en las **Fig. 8 y 9**.

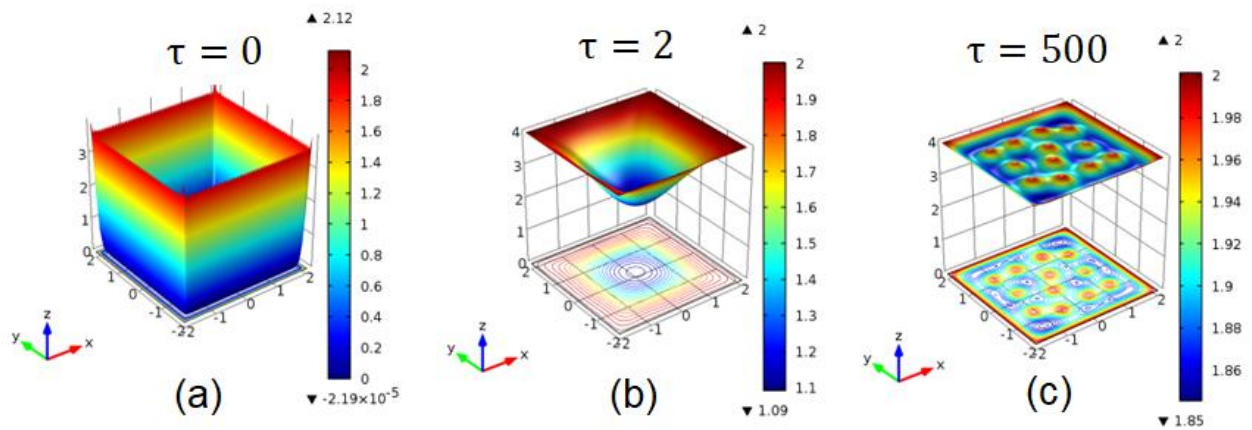


Figura 8. Evolución de la inducción magnética $B_{az}(x, y, \tau) = u_{4x} - u_{3y}$ en una muestra cuadrada de lado 4 con un campo aplicado $B_{ext} = 2$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

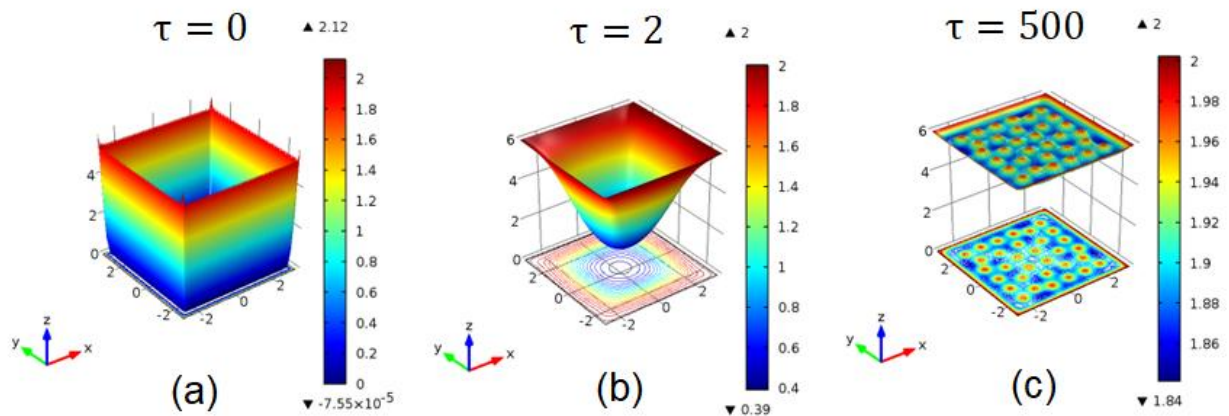


Figura 9. Evolución de la inducción magnética $B_{az}(x, y, \tau) = u_{4x} - u_{3y}$ en una muestra cuadrada de lado 6 con un campo aplicado $B_{ext} = 2$ para los tiempos normalizados $\tau = 0, 2$ y 500 respectivamente.

DISCUSIÓN

En las **Fig. 2 y 3** se observa la evolución de la densidad de electrones superconductores para los tiempos normalizados de $\tau = 0, 2$ y 500 para la muestra superconductora cuadrada de lados 4 y 6, cuando sobre la muestra actúa un campo magnético externo de 0.8. Para el tiempo normalizado $\tau = 0$ la **Fig. 2a)** muestra que el superconductor se encuentra en el estado Meissner esto es, que la densidad de electrones superconductores es uno, es decir, $n(x, y, \tau = 0) = 1$, esta es descrita en la barra de colores por el color rojo. Para el tiempo $\tau = 2$ ya se puede observar la presencia de formación de estados vórtices en la frontera del cuadrado, en el cual, se cumple la relación $0.68 \leq n(x, y, \tau = 2) \leq 1$, como muestra la **Fig. 2b)**. Finalmente, en la **Fig. 2c)** el tiempo normalizado es $\tau = 500$, en este caso existe una ligera variación de la densidad de electrones superconductores respecto a la **Fig. 2b)** cumpliéndose la relación $0.57 \leq n(x, y, \tau) \leq 1$.

Cuando la muestra cuadrada tiene lado 6, observamos en la **Fig. 3a)** para el tiempo normalizado $\tau = 0$ el superconductor también está en el estado Meissner, es decir, su densidad de electrones

superconductores es $n(x, y, \tau = 0) = 1$, posteriormente cuando $\tau = 2$ la superconductividad disminuye en la frontera del cuadrado, excepto en las esquinas cumpliéndose la relación $0.63 \leq n(x, y, \tau = 2) \leq 1$ cómo se observa en la **Fig. 3b**). Finalmente, cuando $\tau = 500$ observamos en la **Fig. 3c**) la penetración del flujo magnético en el superconductor en forma cuantizada, denominado fluxon. Esto posibilita la presencia de estados vórtices en ciertos puntos interiores del cuadrado, donde hay supresión de la superconductividad, cumpliéndose la condición $0 \leq n(x, y, \tau = 500) \leq 0.99$, indicando que la muestra cuadrada es un metal con una configuración de 4 vórtices en el interior.

La **Fig. 4a**) se observa la variación de la inducción magnética con campo externo aplicado de 0.8 y con tiempo inicial normalizado $\tau = 0$, también se encuentra en un estado Meissner, por tanto, en el interior del cuadrado la inducción magnética es cero, esto es, $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0$, pero en la frontera del cuadrado la inducción magnética toma el valor del campo aplicado $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0.8$.

Luego, en la **Fig. 4b**) para el tiempo normalizado $\tau = 2$ se observa la variación de la inducción magnética, en el interior y la frontera del cuadrado varía de acuerdo a la relación $0.5 < B_{az}(x, y, \tau = 2) \leq 0.8$. Finalmente, cuando $\tau = 500$ hay una ligera variación de la inducción magnética en el interior y también se cumple la condición $0.55 < B_{az}(x, y, \tau = 500) \leq 0.8$ como se observa la **Fig. 4c**).

En la **Fig. 5a**) se visualiza que para $\tau = 0$ la inducción magnética es cero en el interior del cuadrado esto es $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0$, en cambio en la frontera tiene el valor de $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0.8$, equivalente al campo aplicado. Después en el tiempo $\tau = 2$ se observa una variación en la inducción magnética cumpliéndose la relación $0.3 < B_{az}(x, y, \tau = 2) \leq 0.8$, como muestra la **Fig. 5b**). Por último, cuando $\tau = 500$ en la **Fig. 5c**), observamos que la inducción magnética aumenta en el interior variando aproximadamente según $0.55 < B_{az}(x, y, \tau = 500) \leq 0.8$.

La **Fig. 6** muestra la evolución de la densidad de electrones superconductores para un cuadrado de lado 4 con campo magnético aplicado externo $B_{ex} = 2$. Para el tiempo normalizado $\tau = 0$, el sistema se encuentra en el estado Meissner descrita por la densidad de electrones superconductores $n(x, y, \tau = 0) = 1$, en todo punto interior del cuadrado como muestra la **Fig. 6a**). Después cuando $\tau = 2$ hay una variación de la densidad de electrones, cumpliéndose la relación $0 \leq n(x, y, \tau = 2) \leq 1$ que indica la supresión de la superconductividad en la frontera del cuadrado, generando la formación de estados vórtices, como se visualiza en la **Fig. 6b**). Finalmente, la **Fig. 6c**) dado para $\tau = 500$ muestra que la supresión de la superconductividad ahora es en la zona interna del cuadrado se forman una estructura de 12 vórtices, que cumplen la relación $0 \leq n(x, y, \tau = 500) \leq 1$.

En la **Fig. 7** observamos la evolución de la densidad de electrones superconductores para una muestra cuadrado de lado 6 con campo magnético externo aplicado de $B_{ex} = 2$. En $\tau = 0$ el superconductor está en estado Meissner y cumple la relación $n(x, y, \tau = 0) = 1$ indicando que es un superconductor perfecto, como muestra la **Fig. 7a**), en la **Fig. 7b**) mostramos que cuando $\tau = 2$ la presencia del campo magnético externo hace que la densidad de electrones superconductores se suprima en la frontera cumpliéndose la condición $0 \leq n(x, y, \tau = 2) \leq 1$. Finalmente, cuando $\tau = 500$ hay mayor penetración del flujo magnético en forma cuantizada esto indica mayor supresión de la superconductividad, haciendo que en el interior de la muestra se forme una estructura con 32 vórtices esto indica que está en un estado metálico normal, cumpliéndose la condición $0 \leq n(x, y, \tau = 500) \leq 1$ tal como muestra la **Fig. 7c**).

En la **Fig. 8** mostramos la evolución de la inducción magnética en la muestra superconductora cuadrada de lado 4. De modo que en la **Fig. 8a**) dada para $\tau = 0$ la inducción en la frontera es igual al campo aplicado externo $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 2$ y en el interior del cuadrado $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0$, por el contrario, cuando $\tau = 2$ la inducción magnética aumenta en el interior y se cumple

la condición aproximada $1.4 < B_{az}(x, y, \tau = 2) \leq 2$ como se observa en la **Fig. 8b**). Finalmente, en la **Fig. 8c**) observamos que la inducción magnética aumenta en el interior del cuadrado cumpliéndose la relación $1.92 < B_{az}(x, y, \tau = 500) \leq 2$.

Finalmente, la **Fig. 9** muestra la evolución de la inducción magnética en la muestra superconductora cuadrada de lado 6, con un campo magnético aplicado de 2. Donde para el tiempo $\tau = 0$ la muestra está en el estado Meissner, lo que indica que la inducción magnética en el interior es cero, esto es, $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 0$ y en la frontera la inducción magnética es máxima y es igual al campo magnético aplicado externo $B_{az}(x, y, \tau = 0) = 2$ como se muestra en la **Fig. 9a**). En la **Fig. 9b**) se observa que en el tiempo normalizado $\tau = 2$ la inducción magnética varía en el interior cumpliéndose la condición aproximada $0.8 < B_{az}(x, y, \tau = 2) \leq 2$. Finalmente, para el tiempo normalizado $\tau = 500$ hay un aumento de la inducción magnética verificándose que $1.92 < B_{az}(x, y, \tau = 500) \leq 2$ tal como se observa en la **Fig. 9c**).

1. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos en los cálculos realizados podemos afirmar que la influencia de los campos magnéticos aplicados en la dirección del eje z perpendicular a la muestra cuadrada, permite la formación de estados vórtices. Se observa que el tamaño de la muestra superconductora cuadrada influye en la formación de estados vórtices, estas se muestran en las figuras: **Fig. 2 c**), **Fig 3 c**), **Fig 6 c**) y **Fig. 7 c**). Se pueden observar, también, que existe un máximo número de vórtices que penetran en la muestra superconductora cuadrada y estas forman configuración de vórtices, tal como se observan en la **Fig. 3c**) 4 vórtices, en la **Fig. 6c**) 12 vórtices y en la **Fig. 7c**) 32 vórtices, para un tiempo normalizado $\tau = 500$.

Además, existe un máximo número de flujo magnético cuantizado que penetra en el interior del cuadrado para un tiempo normalizado $\tau = 500$ y estos se visualizan en: **Fig. 5c**) con 4 fluxones, **Fig. 8c**) con 12 fluxones y **Fig. 9c**) con 32 fluxones.

Finalmente, concluimos que, para un tiempo de ejecución $\tau \leq 500$, el máximo número de vórtices y fluxones que penetran en el interior de la muestra cuadrada no son suficientes para alcanzar la estabilidad de la red de vórtices, y, por tanto, podemos inducir que para ello se debe realizar un mayor tiempo de ejecución, es decir, para un $\tau > 500$.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Abrikosov, A. A. (2017). *Fundamentals of the Theory of Metals*. Courier Dover.
- Chaves, A. P. (2011). Vortex-vortex interaction in bulk superconductors: Ginzburg-Landau theory. *Physical Review B*.
- Deang, J. D. (1997). Vortices in superconductors: modelling and computer simulations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1957-1968.
- Fleckinger-Pelle, J. &. (1995). Gauges for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity. *Argonne National Lab*.
- Gor'kov, L. P. (1950). Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, 1364-1367.
- Hoffmann, K. H. (2012). *Ginzburg-Landau phase transition theory and superconductivity* (Vol. 134). Birkhäuser.
- Li, B. &. (2015). A new approach for numerical simulation of the time-dependent Ginzburg-Landau equations. *Journal of Computational Physics*, 303, 238-250.
- Schmid, A. (1966). A time dependent Ginzburg-Landau equation and its application to the problem of resistivity in the mixed state. *Physik der kondensierten Materie*, 302-3017.
- Sorensen, M., Larson, T. S., & Madsen, S. (2006). The Ginzburg-Landau Equation Solved by the Finite Element Method. *Nordic COMSOL Conference*.
- Tinkham, M. (2004). *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation.